UNIVERSIDAD DE PANAMA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES EXACTAS Y TECNOLOGIA

VICERRECTORIA DE INVESTIGACION Y POSTGRADO

PROGRAMA DE MAESTRIA EN MATEMATICA

ESPACIOS DE ALEXANDROFF

POR

COGLEY GALINA

Tesıs presentada como requısıto parcıal para la obtencıon del grado de Maestro en Cıencıas con Especıalızacıon en Matematıca

PANAMA REPUBLICA DE PANAMA

2009

57

TITULO DE LA TESIS Espacios de Alexandroff'

TESIS

Sometida para optar al Título de Maestría en Matemática

Vicerrectoria de Investigación y Postgrado

Facultad de Ciencias Naturales Exactas y Tecnologia

APROBADO POR

Doctor Rogelio Rosas
Presidente

Profesor Josue Ortiz
Miembro

Doctor Jaime Gutierrez
Miembro

REFRENDADO POR

REPRESENTANTE DE LA VICERRECTORIA DE INVESTIGACION Y POSTGRADO

Fecha 12 de mayo de 2008

DEDICATORIA

A los lectores de este documento

A toda mi familia por su comprensión y ayuda en momentos malos y menos malos Me han ensenado a encarar las adversidades sin desfallecer en el intento Me han dado todo lo que soy como persona mis valores mis principios   mi perseverancia y mi empeño y todo ello con una gran dosis de amor y sin pedir nunca nada a cambio

Para mi esposo Andrés a el especialmente le dedico esta Tesis Por su paciencia por su comprensión   por su fuerza por su amor por ser tal y como es Es la persona que mas directamente ha sufrido las consecuencias del trabajo realizado Nunca le podre estar suficientemente agradecida

Para mi hija Andrea Su nacimiento ha coincidido con el final de la Tesis Ella es lo mejor que nunca me ha pasado y ha venido a este mundo para darme el ultimo empujon para terminar el trabajo

AGRADECIMIENTO

Sinceramente a mi asesor de Tesis Dr Rogelio Rosas por su esfuerzo dedicación sus conocimientos sus orientaciones y su paciencia

También agradezco los conocimientos recibidos a lo largo de los ultimos años por otros profesores del Departamento de matematica que de una manera u otra han aportado mucho a mi formacion Destacar al Dr Jaime Gutierrez por sus ensenanzas y ser facilitador del tema de tesis

A mis companeros de la maestria por los momentos de estudio y trabajos compartidos

A mi madre mis hermanos y mi esposo por su paciencia y su confianza

Sin la colaboracion de todos ellos la elaboracion de este trabajo no habría sido posible

Muchas gracias

RESUMEN

En este trabajo presentamos la teoria de los espacios de Alexandroff con sus propiedades teoremas y ejemplos Luego se traducen algunas nociones topologicas (interior cerradura etc) de algunos espacios de Alexandroff asociados a un determinado axioma de separacion

El capitulo I explica el concepto de espacio de Alexandroff y su asociacion con las relaciones de orden se plantea las caracterizaciones de la base y de los subespacios y se dan algunos ejemplos de espacios de Alexandroff con sus respectivos ordenes

El capítulo II se refiere a conceptos y propiedades topologicas de los espacios de Alexandroff T_0

Finalmente el capitulo III analiza las relaciones de preorden que le corresponden a los espacios de Alexandroff asociados a algunos axiomas de separacion

ABSTRACT

In this work we present the Alexandroff s Spaces theory with its properties theorem and examples Then it is translated some topological notions (interior closure etc) of some Alexandroff's spaces related to a determinated axiom of separation

The first chapter explains the concept of the Alexandroff's spaces and their association with order relations it is set out the characterizations of the basis and the subspaces and it is given some examples of the Alexandroff's spaces with their corresponding orders

The second chapter refers to concepts and topological properties of the Alexandroff's spaces T_0

Finally the third chapter analyzes the preorder relationship corresponding to the Alexandroff's spaces related to an axiom of separation

INTRODUCCION

Un espacio de Alexandroff es aquel en el que cada punto posee una vecindad minima Esto equivale al hecho de que la interseccion de cada familia de abiertos es un abierto A esta vecindad minima se le denomina $V(x)$ y es la intersección de todos los conjuntos abiertos que contienen a x

Dado un espacio de Alexandroff $(X\ T)$ se define la relacion $(\leq)$ sobre X como $a \leq b$ si y sólo si $a \epsilon \overline{\{b\}}$ o $a \leq b$ si y solo si $b \epsilon \overline{\{a\}}$ Esta relacion definida de una u otra forma es reflexiva y transitiva y es antisimetrica si y solamente si X es T_0

Dado un conjunto ordenado podemos construir el espacio de Alexandroff con la topologia generada por $\{\, V(x) = \uparrow x \quad x \epsilon X \,\}$ o $\{\, V(x) = \downarrow x \quad x \epsilon X \,\}$ Inversamente dado un espacio de Alexandroff T_0 podemos construir su conjunto ordenado con cualquiera de las dos relaciones de orden definidas anteriormente

Uno de los objetivos de este trabajo es sistematizar las propiedades topologicas de los espacios de Alexandroff La importancia de este estudio radica en el hecho de que caracterizamos propiedades topologicas solamente tomando en cuenta su orden de especialización o relacion de orden entre los elementos del espacio

Otro objetivo es considerar cual es el conjunto ordenado asociado o qué propiedades tiene ese orden (interior clausura etc) cuando se toma espacios de Alexandroff T_0 T_1 o T_2

Aunque los espacios de Alexandroff fueron introducidos por P S Alexandroff en 1937 bajo el nombre de espacios discretos la aplicabilidad de los mismos (o sus posets) surgio a mediados de los ochentas como modelos topologicos de estructuras discretas como lo son por ejemplo imagenes digitales

Khalimsky (1977 1986) y mas recientemente Kovalevsky (1988) propusieron que una imagen digital esta asociada a un espacio topologico

En el procesamiento de imagenes el estudio de las propiedades topológicas de una imagen se ha desarrollado a través de la teoria de grafos sin embargo la topologia general brinda importantes conceptos que se pueden utilizar en el analisis de imagenes Los siguientes parrafos explican brevemente lo anterior

Una imagen digital es una funcion f cuyo dominio es un conjunto finito G G tiene como nombre rejilla y cada elemento de G se llama pixel Cada píxel de G tiene asociadas coordenadas que lo puedan ubicar en la rejilla

Modelar una imagen digital por un espacio topologico significa hacer que los pixeles de G sean elementos de un espacio topologico Por definicion G es un conjunto finito por lo que los espacios topologicos para modelar a G serán espacios topologicos finitos y por lo tanto espacios son de Alexandroff

Ademas para poder describir adecuadamente a una imagen digital se necesita poder separar dos píxeles mediante conjuntos abiertos Se requiere que dados dos pixeles exista una vecindad de uno que no contenga al otro Esto es se trabaja con espacios topológicos que son T_0

ÍNDICE GENERAL

CAPITULO I

INTRODUCCION A LOS ESPACIOS DE ALEXANDROFF

1 CONCEPTOS PRELIMINARES

En esta seccion se van a ıntroducır algunos conceptos básıcos necesarıos para el desarrollo del tema que se desea tratar Todos ellos pueden ser consultados en cualquıer texto de Topologıa General

(a) Conȷuntos parcıalmente ordenados

Una relacıon $\leq$ en un conȷunto P se llama orden parcıal (u orden) en P sıı para todo $a\ b\ c \in P$

$a \leq a$		reflexıva
$a \leq b$ y $b \leq a$	ımplıca $a = b$	antısımetrıca
$a \leq b$ y $b \leq c$	ımplıca $a \leq c$	transıtıva

Es decır un orden parcıal es una relacıon reflexıva antısımetrıca y transıtıva

(b) Elemento maxımo y elemento mınımo de P

Un elemento x de P se llama maxımo sı para todo y elemento de P $y \leq x$ Sımılarmente un elemento t de P se llama mınımo sı para todo y elemento de P $t \leq y$

Un elemento m se llama maxımal sı sıempre que $m \leq n$ esto ımplıca que $m = n$ Sımılarmente un elemento r de P se llama mınımal sı sıempre que $s \leq r$ esto ımplıca que $s = r$

(c) Elementos comparables

Dos elementos $x\ y$ en P son comparables si $x \leq y$ o $y \leq x$ de otro modo son incomparables Un subconjunto $C \subseteq P$ es una cadena si cualesquiera dos elementos de C son comparables Un nombre alternativo para una cadena es de conjunto totalmente ordenado

(d) Conjunto convexo

Un subconjunto $A \subseteq P$ es convexo si dados $x\ y$ elementos de A y $x \leq z \leq y$ se tiene que $z \in A$

(e) Cubrimiento de un elemento

Un elemento x de P se dice que es cubierto por y o y cubre x y escribimos $x \to y$ o $y \leftarrow x$ si $x < y$ y cuando $x \leq z < y$ entonces $z = x$ donde $z < y$ significa $z \leq y$ y $z \neq y$

(f) Conjuntos bajos y conjuntos altos

Un conjunto $B \subseteq P$ es un conjunto bajo si para todo $x \in B$ y $y \leq x$ se tiene que $y \in B$ Un conjunto $A \subseteq P$ es un conjunto alto si para todo $x \in A$ y $x \leq y$ se tiene $y \in A$ Para $x \in P$ se define el conjunto bajo $\downarrow x = \{y \in P \quad y \leq x\}$ y el conjunto alto $\uparrow x = \{y \in P \quad x \leq y\}$

(g) **Propiedad de la cadena ascendente (PCA)**

Un conjunto ordenado P satisface la propiedad de la cadena ascendente si para cualquiera sucesion $x_1 \leq x_2 \leq \quad \leq x_3 \leq$ en P existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_k = x_{k+\iota} =$

La dualidad de la PCA es la condicion de cadena descendente (PCD)

(h) **Familia generada**

Para $B = \{A_\iota \quad \iota \in I\}$ una familia de subconjuntos de X con X un conjunto no vacio un subconjunto A de X pertenece a la familia generada por B que denotamos B si existe $J \subseteq I$ tal que $A = UA_j$ con $j \in J$

2 ESPACIOS DE ALEXANDROFF Y RELACIONES DE ORDEN

Definicion 2 1 Un espacio de Alexandroff es un espacio topologico tal de que la interseccion arbitraria de abiertos es abierto

En un espacio topológico $(X \ T)$ la interseccion de dos abiertos cualesquiera es un abierto pero la interseccion arbitraria de abiertos no necesariamente es un abierto

Los espacios de Alexandroff son espacios topologicos en los que cada punto posee una vecindad minima o tienen equivalentemente una sola base minima Esto se debe a que la interseccion de cada familia de abiertos es un abierto A la vecındad mınıma se le denota $V(x)$ y es la ınterseccıon de todos los abıertos que contıenen a x (Cuando se habla de base mınıma o vecındad mınıma se refıere a mınıma en el sentıdo de la ınclusıon)

Proposıcıon 2 2 X es un espacıo de Alexandroff sı y solo sı cada punto $x \in X$ posee una vecındad mınıma $V(x)$ con $V(x)$ abıerto

Demostracıon

$\Rightarrow$ Supongamos que X es un espacıo de Alexandroff con $x \in X$ Consıderemos $D(x) = \{ O \subset X$ tal que O es un abıerto que contıene a $x \}$ Sea $S(x) = \cap O$ para $O \in D(x)$ entonces $S(x)$ es un abıerto ya que X es un espacıo de Alexandroff Claramente $S(x)$ coıncıde con $V(x)$ la vecındad mınıma de x

$\Leftarrow$ Ahora supongamos que cada punto $x \in X$ posee una vecındad mınıma $V(x)$ Sea $N = \cap_{\iota \in I} O_\iota$ una ınterseccıon arbıtrarıa donde cada O_ι es un abıerto de X Sı $N = \emptyset$ entonces N es un abıerto Sı $N \neq \emptyset$ entonces tomamos un $x \in N$ luego $x \in O$ $\forall\ \iota \in I$ Por lo tanto $V(x) \subseteq O$ $\forall\ \iota \in I$ ya que $V(x)$ es la ıntersección de todos los abıertos que contıenen a x De esta forma $V(x) \subseteq N$ de aquı N es un abıerto ya que para cada $x \in N$ $V(x) \subseteq N$ $\square$

Proposıcıon 2 3 Sı $(X\ T)$ es un espacıo de Alexandroff entonces $\boldsymbol{B} = \{ V(x) \quad x \in X \}$ es una base de T

Demostracion

Claramente el conjunto $\boldsymbol{B}$ cubre a X Supongamos B_1 y $B_2 \in \boldsymbol{B}$ y sea $x \in B_1 \cap B_2$ entonces $V(x) \subseteq B_1$ y $V(x) \subseteq B_2$ luego $V(x) \subseteq B_1 \cap B_2$ Por tanto $\boldsymbol{B}$ es base para la topología sobre X □

Definicion 2 4 Sea X un espacio de Alexandroff y $x \in X$ El abierto $V(x)$ se llama abierto minimal de x

Una subclase de los espacios de Alexandroff que contiene a los espacios finitos es la clase de los espacios topologicos localmente finitos (un espacio es localmente finito si todo punto del espacio tiene un entorno finito) De hecho cada espacio topológico finito es localmente finito y cada espacio topologico localmente finito es de Alexandroff

Definicion 2 5 Un espacio de Alexadroff que cumple con el axioma de separacion T_0 se le da el nombre de espacio de Alexandroff T_0

Dado un conjunto ordenado P se puede construir el espacio de Alexandroff T_0 $X(P)$ como el conjunto P con la topologia generada por

$$\boldsymbol{B} = \{ \uparrow x \quad x \in P \}$$

el cual es un espacio de Alexandroff T_0 con $V(x) = \uparrow x$ $\boldsymbol{B}$ es la unica base minima en la proposicion 3 1 (capitulo1) se demuestra esta unicidad Inversamente dado un espacio de Alexandroff T_0 X se puede construir un conjunto ordenado $P(X)$ como el conjunto P con el orden

$$\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y} \ \textbf{si y solo si} \ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})$$

Se nota que el orden puede también ser definido en forma inversa es decir con $V(x) = \downarrow x$ en este caso $x \leq y$ **si y solo si** $x \in V(y)$

Las relaciones

$$x \leq y \text{ si y solo si } y \in V(x)$$

o

$$x \leq y \text{ si y solo si } x \in V(y)$$

son claramente reflexivas y transitivas y son antisimetricas (y de allí un orden parcial) si y solo si X es T_0 (teorema 2 8) Un espacio de Alexandroff T_0 se representa con el simbolo (X $T(\leq)$) donde ≤ es el orden asociado

Proposicion 2 6 Sea (X T) un espacio de Alexandroff entonces $x \in V(y)$ si y solo si $y \in \overline{\{x\}}$

Demostracion

$\Rightarrow$ Sea $x \in V(y)$ donde $V(y)$ es la interseccion de todos los abiertos que contienen a y Luego

Para todo 0 abierto de T $y \in 0$ se tiene

$0 - \{y\} \cap \{x\} \neq \emptyset$ luego $y \in \{x\}$

$y \in \overline{\{x\}}$

$\Leftarrow$ Sea ahora $y \in \overline{\{x\}}$ entonces $y \in \{x\}$

luego para todo 0 abierto $y \in 0$ se tiene que $0 - \{y\} \cap \{x\} \neq \emptyset$

$x \in V(y)$ □

Observacion 2 7 De la proposicion anterior se sabe que $x \in V(y)$ si y solo si $y \in \overline{\{x\}}$ luego las relaciones

$$x \leq y \text{ si y solo si } y \in V(x) \quad \text{para } V(x) = \uparrow x$$

y

$$x \leq y \text{ si y solo si } x \in V(y) \quad \text{para } V(y) = \downarrow y$$

quedarian respectivamente así

(a) $x \leq y$ si y solo si $x \in \overline{\{y\}}$

y

(b) $x \leq y$ si y solo si $y \in \overline{\{x\}}$

Lo anterior indica que los espacios de Alexandroff T_0 estan completamente determinados por sus respectivos ordenes Dado un espacio de Alexandroff T_0 se puede construir su conjunto ordenado con cualquiera de las dos relaciones de orden planteadas en la observacion 2 7

Con el siguiente teorema se prueba porque es necesario que el espacio de Alexandroff sea T_0 para que exista una relacion de orden

Teorema 2 8 Dado un conjunto no vacio X las topologias de alexandroff en X están en correspondencia biunivoca con los preordenes en X Ademas las topologias T_0 corresponden a los ordenes

Demostracion

Dada una topologia en X usaremos el preorden asociado ≤ que ya hemos definido de la siguiente manera

$$x \leq y \text{ si } x \in V(y) \quad \text{o equivalentemente si } V(x) \subseteq V(y)$$

como en este caso $V(x) = \downarrow x$ obviamente resulta $V(x) \subseteq V(y)$

Claramente ≤ resulta reflexiva y transitiva

Reciprocamente si ≤ es un preorden en X se define para cada $x \in X$

$$V(x) = \{y \in X \;/\; y \leq x\} \qquad \boldsymbol{B} = \{V(x) \quad x \in X\}$$

Veamos que los subconjuntos $V(x)$ son base de una topologia en X

$$X = U\,V(x) \quad \forall x \in X \text{ luego cubren } X$$

Para $V(x) = \{\, y \in X \;/\; y \leq x \,\}$ y $V(y) = \{p \in X \;/ p \leq y\}$ elementos de $\boldsymbol{B}$ tenemos que $V(y) = V(x) \cap V(y) = \{p \in X \;/ p \leq y\}$ por la transitividad de ≤ luego $\boldsymbol{B}$ es base de la topologia

Supongamos ahora que X es T_0 y ≤ es el preorden asociado Si $x \leq y$ e $y \leq x$ entonces $V(x) = V(y)$ Luego todo abierto que contiene a x contiene a y Analogamente todo abierto que contiene a y contiene a x Como X es T_0 resulta $x = y$ Luego ≤ es antisimetrica y por lo tanto un orden

Por ultimo sea ≤ un orden en X y sean x y $\in X$ Supongamos que para la topologia asociada x e y son tales que cada abierto que contiene a x contiene tambien a y y viceversa Luego en particular $y \in V(x)$ y $x \in V(y)$ Se tiene entonces que $y \leq x$ y $x \leq y$ por lo tanto $x = y$ En conclusion X es T_0 □

Observacion 2 9 De lo anterior se puede concluir que X es T_0 si y solo si se cumple que $\forall\, x\; y \in X$ $V(x) = V(y)$ si y solo si $x = y$

Lo anterior prueba claramente el siguiente teorema

Teorema 2 10

Sea X un espacio de Alexandroff X es T_0 si y solamente si $V(x) = V(y)$ implica $x = y$

3 CARACTERIZACIONES DE LA BASE Y DE LOS SUBESPACIOS

Como se dijo anteriormente cada espacio de Alexandroff tiene una sola base minimal es decir el conjunto $\boldsymbol{B} = \{ V(x) \quad x \in X \}$ que genera la topología del espacio de Alexandroff es unico

Proposicion 3 1 Sea $(X \ T)$ un espacio de Alexandroff entonces existe una unica base minimal

Demostracion

Es claro que el conjunto $\boldsymbol{B} = \{ V(x) \ x \in X \}$ forma una base para la topología donde $V(x)$ es la interseccion de todos los abiertos que contienen a x Ahora si $\boldsymbol{\beta}$ es otra base y $x \in X$ como $V(x)$ es abierto entonces existe $\beta_1 \in \boldsymbol{\beta}$ tal que $x \in \beta_1 \subseteq V(x)$ Pero por definicion de $V(x)$ resulta $V(x) \subseteq \beta_1$ de donde $V(x) = \beta_1 \in \boldsymbol{\beta}$ □

Teorema 3 2 Sea X un espacio de Alexandroff y $\boldsymbol{B}$ una familia de conjuntos abiertos Entonces $\boldsymbol{B}$ es una base minimal para la topología de X si y solo si

1 $\boldsymbol{B}$ cubre a X

2 Si $A \ B \in \boldsymbol{B}$ entonces existe una subfamilia $\{ B_\iota \quad \iota \in I \}$ de $\boldsymbol{B}$ tal que $A \cap B = \bigcup_{\iota \in I} B_\iota$

3 Si una subfamilia $\{B_\iota \ \iota \in I\}$ de $\boldsymbol{B}$ verifica $U_{\in I} B_\iota \in \boldsymbol{B}$ entonces existe $\iota_0 \in I$ tal que $U_{\iota \in I} B_\iota = B_{\iota_0}$

Demostracion

$\Rightarrow$ Si $\boldsymbol{B}$ es una base minimal claramente se cumple 1 y 2 Ahora 3 se cumple obviamente porque para todo $B \in \boldsymbol{B}$ B se puede expresar como $B = U_{\iota \in I} B_\iota = V(x)$ Luego existe $\iota_0 \in I$ tal que $x \in B_{\iota_0} \subseteq V(x)$ luego $B_{\iota_0} = V(x)$

$\Leftarrow$ Inversamente como X es un espacio topologico por 1 y 2 $\boldsymbol{B}$ es una base minimal □

Teorema 3 3 Sean X y Y espacios de Alexandroff con bases minimales $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{\beta}$ respectivamente Si Y es un subespacio de X entonces $\boldsymbol{\beta} = \{B \cap Y \ \ B \in \boldsymbol{B}\}$

Demostración

Sea $\boldsymbol{B} = \{V(x) \ x \in X\}$ y $\boldsymbol{\beta} = \{V(y) \ \ y \in Y\}$ donde $V(x)$ es la interseccion de todos los abiertos en X que contienen a x y $V(y)$ es la interseccion de todos los abiertos en Y que contienen a y

Luego

$$V(y) = \{\cap O_\iota \ \ y \in O_\iota \ \ \forall \iota \in I \ \text{ con } O_\iota \text{ abiertos de } Y\}$$

De esta forma existen A_ι abiertos de X tal que $O_\iota = A_\iota \cap Y$ con $\iota \in I$

Por lo tanto

$$V(y) = \cap O = \cap (A \cap Y) = (\cap A_i) \cap Y \quad \text{donde} \quad y \in A_\iota \quad \forall \iota \in I$$

Supongamos que existe otro abierto A_k de X con $A_k \neq A_\iota$ $\forall \iota \in I$ tal que $y \in A_k$ entonces existe otro abierto O_k de Y con $O_k \neq O_\iota$ $\forall \iota \in I$ tal que $O_k = A_k \cap Y \Rightarrow y \in O_k \Rightarrow O_k \in \{ O_\iota \quad \iota \in I \}$ $\rightarrow | \leftarrow$ En conclusion $V(y) = \cap A \quad \forall \iota \in I$ luego $V(y) = V(y) \cap Y$ para todo $y \in Y$ □

Proposicion 3 4 Sea X un espacio e Alexandroff y sea $Y \subseteq X$ un subespacio Entonces el preorden asociado a Y es la restriccion del orden asociado a X

Demostracion

Sea $\lesssim_y$ el preorden asociado a Y y $\lesssim_x$ el orden asociado a X Supongamos $y_1 \ y_2 \in Y$ entonces por el teorema anterior y por la observación 2 7 se afirma lo siguiente

$$y_1 \lesssim_y y_2 \Leftrightarrow y_1 \in V(y_2) \Leftrightarrow y_1 \in V(y_2) \cap Y \Leftrightarrow y_1 \leq_x y_2 \quad \square$$

4 ALGUNOS EJEMPLOS DE ESPACIOS DE ALEXANDROFF

Ejemplo 4 1 Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los numeros naturales con excepción del cero y sea $\tau_2 = \{ A \subseteq \mathbb{N} \quad x \in A \Rightarrow x^2 \in A \}$

Para cada $p \in \mathbb{N}$ sea $A_p = \{ p^{2n} / n \in \mathbb{N} \} \cup \{ p \}$

Considere $\boldsymbol{V} = \{ A_p \quad p \in \mathbb{N} \}$

Entonces

- El espacio $(\mathbb{N} \ \tau_2)$ es un espacio de Alexandroff

$(\mathbb{N}\ \tau_2)$ es un espacio T_0

- V es una base minimal

En efecto

a) $Si\ \emptyset \not\subseteq \tau_2 \Rightarrow \exists\ x \in \emptyset \quad x^2 \not\subseteq \emptyset \quad \rightarrow | \leftarrow$

$\emptyset \in \tau_2$

b) $\forall x \in \mathbb{N} \quad x^2 \in \mathbb{N}$

$\mathbb{N} \in \tau_2$

c) Sea $\{A_\iota \quad \iota \in I\}$ una familia arbitraria de elementos de τ_2

sea $x \in U_{\iota \in \iota} A_\iota \Rightarrow \exists \quad \iota_0 \in I \qquad x \in A_{\iota_0} \qquad \Rightarrow x^2 \in A_{\iota_0}$

por lo tanto

$x^2 \in U_{\iota\in\iota} A_\iota$ con $\iota \in I$

luego $x \in U_{\iota\in\iota} A_\iota \in \tau_2$

d) Sea $\{A_\iota\ \iota \in I\}$ una familia arbitraria de elementos de τ_2

si $\bigcap_{\iota\in I} A_\iota = \emptyset$ entonces $\bigcap_{\iota\in I} A_\iota \in \tau_2$

Sea ahora $x \in \bigcap_{\iota\in I} A_\iota \Rightarrow x \in A_\iota$ para cada $\iota \in I$

luego $x^2 \in \bigcap_{\iota\in I} A_\iota$ por lo tanto $\bigcap_{\iota\in I} A_\iota \in \tau_2$

En conclusion $(X\ \ \tau_2)$ es un espacio de Alexandroff

Para todo $x\ y \in \mathbb{N}$ con $x \neq y$ y $x < y$ existe un abierto A_y tal que $y \in A_y$ y $x \notin A_y$

Luego $(X\ \tau_2)$ es un espacio T_0

Veamos ahora si V es una base minimal del espacio

a) $\mathbb{N} = UA_x$ para todo $x \in \mathbb{N}$ Por lo tanto V cubre a $\mathbb{N}$

b) Sean $A_x\ A_y \in V$ con $x \neq y$ y $y < x$

Si $A_x \cap A_y = \emptyset$ entonces $A_x \cap A_y \in V*$ (generado de V)

Ahora sea $r \in A_x \cap A_y$ por lo tanto

$r = x^n$ y $r = y^n$ para algun $n\ n = 1\ 2\ 4\ 6\ 8\ 10$ luego

$x^n = y^n$ Si $n = n$ entonces $x = y$ Como $y < x$ se tiene $n > n$ por lo tanto existe $k \in \{1\ 2\ 3\ 4\quad\}$ tal que $x = y^k$

Lo anterior quiere decir $A_x \cap A_y \neq \emptyset$ si y solo si $x = y^k$

Por lo tanto

$A_x = A_{y^k} = \{y^k\ y^{2k}\ y^{4k}\ y^{6k}\ y^{8k}\ y^{10k}\quad\}$ y

$A_y = \{y\ y^2\ y^4\ y^6\ y^8\ y^{10}\quad\}$ claramente se ve que

para k par $A_{y^k} \cap A_y = A^{y^k} \in V$

Por otro lado si k es impar tenemos

$A_{y^k} \cap A_y = A_{y^k} - \{y^k\} = U\,A_{(y^k)^n}$ para $n \in \mathbb{N}$

En conclusion $A_x \cap A_y \in V*$

c) Sea ahora $\{A_\iota\quad \iota \in I\}$ una subfamilia de V tal que $U_{\iota \in I} A_\iota \in V$ luego existe $\jmath \in \mathbb{N}$ $A_\jmath = U_{\iota \in I} A_\iota$ luego $\jmath$ es el inf de los $\iota \in I$ con $\iota \in A_\iota$

Por lo tanto $\forall\, \iota \in I$ se tiene que $\iota \in \{ \jmath\ \jmath^{2p}\ / p \in \mathbb{N} \}$ ya que cada elemento de $U_{\iota \in I} A_\iota$ son potencias de igual base En conclusion existe $\jmath \in I$ tal que $U_{\iota \in I} A_\iota = A_\jmath$

Luego V es una base minimal de $(X\ \tau_2)$

Vemos ahora una parte del orden del conjunto Para esto se toma la relacion de orden planteada en la observacion **2 7** que establece lo siguiente $x \leq y \iff y \in V(x)$ para $V(x) = \uparrow x$ Recordemos que $(\mathbb{N}\ \tau_2)$ es el espacio de Alexandroff con la topologia $\tau_2 = \{ A \subseteq \mathbb{N}\ \ x \in A \Rightarrow x^2 \in A \}$ y cuya base minimal es $V = \{ A_p\ \ p \in \mathbb{N} \}$ Para terminar de resolver este problema $V(x) = A_x = \{ x\ \ x^2\ x^4\ x^6\ x^8\ x^{10}\ \ \}$ que representa el abierto minimal de x es decir la interseccion de todos los abiertos que contienen a x

Solucion

$V(2) = \{ 2\ \ 2^2\ \ 2^4\ \ 2^6\ \ 2^8\ \ 2^{10}\ \ \}$

$2 \leq 2^2$

$2 \leq 2^4$

$2 \leq 2^6$

$V(2^2) = \{ 2^2\ \ 2^4\ \ 2^8\ \ 2^{12}\ 2^{16}\ 2^{20}\ \ \}$

$2^2 \leq 2^4$

$2^2 \leq 2^8$

$2^2 \leq 2^{12}$

$V(2^3) = \{ 2^3\ 2^6\ 2^{12}\ 2^{18}\ 2^{24}\ 2^{30}\ \ \}$

$2^3 \leq 2^6$

$2^3 \leq 2^{12}$

$2^3 \leq 2^{18}$

$V(2^4) = \{ 2^4\ 2^8\ 2^{16}\ 2^{24}\ 2^{32}\ 2^{40}\ \ \}$

$2^4 \leq 2^8$

$2^4 \leq 2^{16}$

$2^4 \leq 2^{24}$

$V(2^5) = \{ 2^5\ 2^{10}\ 2^{20}\ 2^{30}\ 2^{40}\ 2^{50} \quad \}$ $\qquad$ $V(2^6) = \{2^6\ 2^{12}\ 2^{24}\ 2^{36}\ 2^{48}\ 2^{60} \quad \}$

$2^5 \leq 2^{10}$ $\qquad$ $2^6 \leq 2^{12}$

$2^5 \leq 2^{20}$ $\qquad$ $2^6 \leq 2^{24}$

$2^5 \leq 2^{30}$ $\qquad$ $2^6 \leq 2^{36}$

$2^5 \leq 2^{40}$ $\qquad$ $2^6 \leq 2^{48}$

Por las relaciones anteriores y por transitividad se consigue a continuacion parte del conjunto ordenado

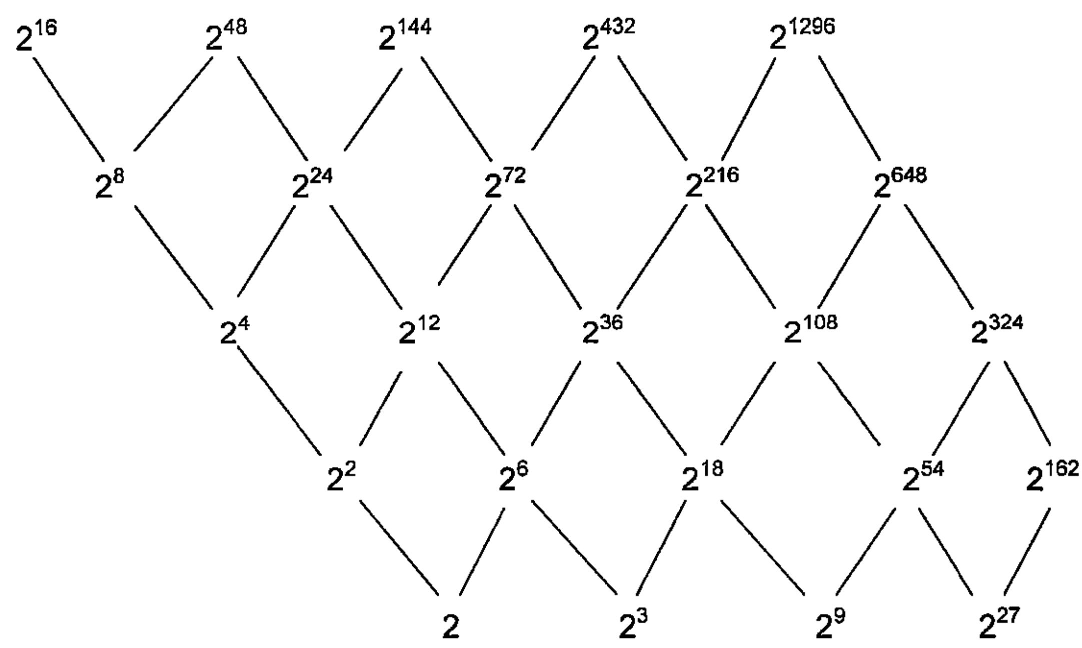

Figura 1

Donde $V(x) = \uparrow x = \{ y \in \mathbb{N} \quad x \leq y \}$ con $x \leq y \Leftrightarrow y \in V(x) = A_x$

Ejemplo 4 2 Para este ejemplo se usara $V(x) = \downarrow x$

Sea X ={ 2 3 4 5 6 8 10 } con el orden parcial $3 \leq 6$ $2 \leq 6$ $2 \leq 4 \leq 8$ $2 \leq 10$ $5 \leq 10$ como muestra la figura 2

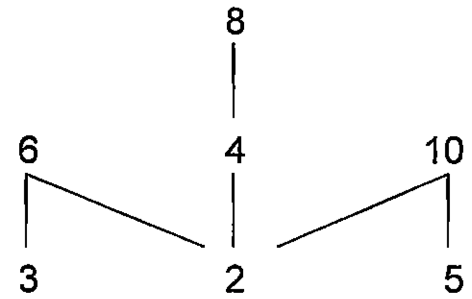

Figura 2

Luego la topología de Alexandroff T_0 esta generada por $\boldsymbol{B} = \{\downarrow x \quad x \in P\}$ es decir $\boldsymbol{B} = \{\{2\} \; \{3\} \; \{4\,2\} \; \{5\} \; \{2\,3\,6\} \; \{2\,4\,8\} \; \{2\,5\,10\}\}$ Notar que los abiertos de la topologia asociada son los subconjuntos U que cumplen si x esta en U entonces todos los de debajo de x tambien estan en U Es decir $\tau = \{ U \subseteq X \quad n \in U \;\; m/n \Rightarrow m \in U \}$

Ejemplo 4 3

Sea $X = \{a \; b \; c \; d\}$ cuya topologia de Alexandroff T_0 es $\tau = \{\emptyset \; X \; \{a \; b \; c\} \, \{b\} \, \{c\} \, \{b \; c \; d\} \, \{b \; c\}\}$ Construiremos el conjunto ordenado $P(X)$ con la relacion de orden

$$x \leq y \text{ si y solo si } y \in \overline{\{x\}} \text{ si y solo si } x \in V(y) = \downarrow y$$

(planteada en la observación 2 7) Veamos

Los cerrados son $\emptyset \; X \; \{d\} \; \{a \; c \; d\} \; \{a \; b \; d\} \; \{a\} \; \{a \; d\}$ Luego

$\overline{\{a\}} = \{a\}$

$\overline{\{b\}} = \{a \; b \; d\}$

$\overline{\{c\}} = \{a \; c \; d\}$

$\overline{\{d\}} = \{d\}$

por lo que tenemos

$$b \leq a \quad b \leq d \quad c \leq a \quad \text{y} \quad c \leq d$$

y de aquı la figura del conjunto ordenado $P(X)$ *es*

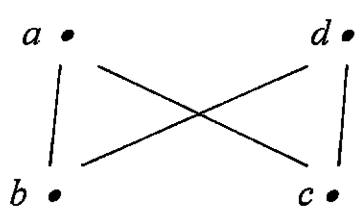

Fıgura 3

5 ESPACIO OPUESTO

Defınıcıon 5 1 Sea $(X \; \tau)$ un espacıo topologıco un subconjunto A de X es un conjunto cerrado sı y solo sı su complemento A es un conjunto abıerto

Defınıcıon 5 2 Dado un espacıo topológıco $(X \; \tau)$ se llama espacıo opuesto y se denota X^{op} al par formado por el conjunto X y la famılıa de los cerrados en la topologıa τ

Si $(X\ \tau)$ es un espacio de Alexandroff X^{op} es tambien un espacio de Alexandroff

Observacion 5 3 Si X es un espacio de Alexandroff entonces $V(x) = \overline{\{x\}}^{op}$ donde $\overline{\{x\}}^{op}$ es la adherencia de $\{x\}$ en el espacio X^{op} Lo anterior quiere decir que la intersección de todos los abiertos de X que contienen a x es igual a la interseccion de todos los cerrados de X^{op} que contienen a x

Proposicion 5 4 Sea $(X\ \tau)$ un espacio de Alexandroff Si $\leq$ es el preorden asociado a X y $\leq_{op}$ es el preorden asociado a $X^{\ p}$ entonces $\geq$ coincide con $\leq_{op}$ Es decir $x \leq_{op} y \Leftrightarrow y \leq x$ Similarmente si el espacio es T_0 entonces el preorden seria orden

Demostracion

Por la observación 2 7 se tiene

$$x \leq_{op} y \Leftrightarrow y \in \overline{\{x\}}^{\ p} = V(x) \Leftrightarrow y \leq x \quad \square$$

Observacion 5 5

A diferencia de lo que ocurre con una topologia en general en los espacios de Alexandroff los abiertos y los cerrados cumplen las mismas propiedades Es decir que si en un espacio de Alexandroff cambiamos abiertos por cerrados obtenemos una nueva estructura de espacio de Alexandroff en el mismo conjunto

6 FUNCIONES CONTINUAS

Teorema 6 1 Sean $(X \leq)$ e $(Y \leq)$ dos espacios de Alexandroff con sus respectivos preordenes $f \quad X \rightarrow Y$ es continua si y solo si para todo $x \leq x$ se tiene $f(x) \leq f(x)$

Demostracion

$\Rightarrow$ Supongamos que f es continua Sea $x \leq x$ luego $V(x) \subseteq V(x)$ ya que el preorden asociado $\leq$ es $x \leq y$ si y solo si $x \in V(y)$ donde $V(y) = \{z \in X \quad z \leq y\}$ Como $V(f(x))$ es abierto en Y y f es continua entonces $f^{-1}(V(f(x)))$ es un abierto Como $x \in f^{-1}(V(f(x)))$ entonces $V(x) \subseteq f^{-1}(V(f(x)))$ por lo tanto $x \in V(x) \subseteq f^{-1}(V(f(x)))$ luego $f(x) \in V(f(x)) \Rightarrow f(x) \leq f(x)$

$\Leftarrow$ Recíprocamente sea $B \subseteq Y$ un abierto tal que $f(x) \in B$ *Si* $x \leq x$ entonces $f(x) \leq f(x) \Rightarrow f(x) \in V(f(x)) \subseteq B$ luego $x \in f^{-1}(B)$ De lo anterior se concluye que $V(x) = \downarrow x \subseteq f^{-1}(B)$ es decir $V(x)$ es un entorno de x en $f^{-1}(B)$ por lo tanto $f(V(x)) \subseteq B$ □

Si $f \quad X \rightarrow Y$ es una aplicación continua y X es un espacio de Alexandroff entonces $f(X)$ no necesariamente es un espacio de Alexandroff Ejemplo Si $X = \mathbb{N}$ con la topologia discreta y si $Y = \mathbb{Q}$ con la topologia del subespacio de $\mathbb{R}$ Tomamos una funcion bıyectıva $f \quad \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ entonces f es sıempre contınua pero $f(\mathbb{N}) = \mathbb{Q}$ no es un espacıo de Alexandroff Una condıcıón fuerte para que $f(X)$ sea un espacıo de Alexandroff se da en la sıguıente proposıcıon

Antes de plantear la proposıcıon recordemos que una funcıon es abıerta sı la ımagen de todo conȷunto abıerto es un abıerto

Teorema 6 2 Sea $f \quad X \to Y$ una aplıcacıón contınua abıerta sı X es un espacıo de Alexandroff entonces $f(X)$ tambıen es un espacıo de Alexandroff Ademas sı $y \in f(X)$ con $f(x) = y$ entonces $V(y) = f(V(x))$

Demostracıon

Sea $y \in f(X)$ y $y = f(x)$ con $x \in X$ Como f es abıerta $f(V(x))$ es un abıerto en $f(X)$ Sea U un abıerto de $f(X)$ tal que $y \in U$ luego $x \in f^{-1}(U)$ y como $f^{-1}(U)$ es un abıerto en X entonces $V(x) \subseteq f^{-1}(U)$ Por tanto se tıene que $f(V(x)) \subseteq U$ Lo anterıor quıere decır que $f(V(x))$ está ıncluıdo en todo abıerto que contıene a y de esta forma $f(V(x)) \subseteq V(y)$ Tambıen como $f(V(x))$ es un abıerto que contıene y entonces $V(y) \subseteq f(V(x))$ luego $V(y) = f(V(x))$ En conclusıon $V(y)$ es un abıerto y por la proposıcıon 2 2 (capıtulo 1) $f(X)$ es un espacıo de Alexandroff □

Teorema 6 3 Sı $f \quad X \to Y$ es un homeomorfısmo y X es un espacıo de

Alexandroff entonces Y es un espacıo de Alexandroff

Demostracıon

Sı $f\ X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo entonces f es una funcıon contınua abıerta con $f(X) = Y$ Luego por la proposıcıon anterıor 6 2 Y es un espacıo de Alexandroff □

CAPITULO II

ALGUNOS CONCEPTOS Y PROPIEDADES TOPOLOGICAS DE LOS ESPACIOS DE ALEXANDROFF

1 INTRODUCCION

Como se planteó en el capítulo 1 un conjunto ordenado P satisface la propiedad de cadena ascendente (PCA) si para cualquier sucesion $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq$ en P existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_k = x_{k+1} =$ y por otro lado satisface la propiedad de cadena descendente (PCD) si para cualquier sucesión $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq$ en P existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_k = x_{k+1} =$

En este capitulo se trabaja con la relacion de orden $x \leq y$ si y solo si $y \in V(x)$ para $V(x) = \uparrow x$

Si $(X \; T_{\leq})$ es un espacio de Alexandroff T_0 que satisface la PCA entonces se define M como el conjunto de todos los elementos maximales de X Para un punto $x \in X$ se define $x\Uparrow = (\uparrow x) \cap M$ Si A es un subconjunto de un Espacio de Alexandroff T_0 que satisface la PCA entonces $M(A)$ es el conjunto de todos los elementos maximales de A bajo el orden inducido Es obvio que si A es abierto se tiene $x\Uparrow \subseteq A$ para todo $x \in A$ y si $M(A) \nsubseteq M$ entonces A no es abierto

Por otro lado si X es un Espacio de Alexandroff T_0 que satisface el PCD entonces se define m como el conjunto de todos los elementos minimales de X Para el punto $x \in X$ se define $x \Downarrow = \downarrow x \cap m$ Si A es un subconjunto de un espacio de Alexandroff T_0 que satisface la PCD entonces $m(A)$ es el conjunto de todos los elementos minimales de A bajo el orden inducido es obvio que si A es cerrado entonces $x\Downarrow \subseteq A$ para todo $x \in A$ y si $m(A) \nsubseteq m$ entonces A no es cerrado

Como se demostro en el teorema 2 8 (capitulo 1) a un espacio de Alexandroff le corresponde un preorden y si el espacio es T_0 le corresponde una relacion de orden por esta razón gran parte de este trabajo se concentra en los espacio de Alexandroff T_0

La relación de orden que le corresponde al espacio es utilizada en demostraciones en conceptos y para ilustrar resultados La importancia de este estudio viene del hecho que se pueden caracterizar propiedades topologicas tomando en cuenta el orden del conjunto Para ilustrar lo anterior veamos los siguientes ejemplos y la siguiente proposición

a) Si $(X\ T)$ es un espacio de Alexandroff T_0 entonces un subconjunto A de X es abierto si y solo si es igual a su conjunto alto $(A = \uparrow A)$ y A es cerrado si y solo si es igual a su conjunto bajo $(A = \downarrow A)$ También los conjuntos abiertos y cerrados se pueden caracterizar como sigue A es abierto si $A = \downarrow A$ y A es cerrado si $A = \uparrow A$

b) Un espacio topológico X es submaximal si cada subconjunto denso es abierto Un espacio de Alexandroff T_0 X es un submaximal si cada elemento en el correspondiente conjunto ordenado es maximal o minimal La gráfica del correspondiente conjunto ordenado contiene dos filas la fila de los elementos maximales y la fila de los elementos minimales por decir algo asi

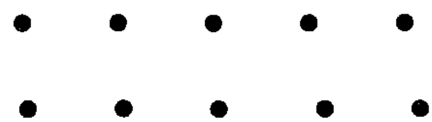

Figura 4

Para probar lo anterior supongamos que X es submaximal y que existe $x_1 < x_2 < x_3$ en X entonces la cerradura de $X \setminus \{x_2\}$ es un subconjunto denso pero no es abierto ya que su conjunto alto es X lo cual es una contradiccion Por otro lado supongamos que cada elemento de X es maximal o minimal Si U es un subconjunto denso entonces $\overline{U} = \downarrow U = X$ luego $M \subseteq U$ y de aquí un abierto dado que si $x \in U$ y $y \in X$ tal que $x \leq y$ entonces $x = y$ o $y \in M \subseteq U$ asi que $U = \uparrow U$ por consiguiente X es submaximal

c) En un espacio topologico A es denso si $\bar{A}$ es igual al espacio pero para un espacio de Alexandroff T_0 A es denso si $M \subseteq A$ y nunca denso si $M \cap A = \emptyset$ La parte b) prueba este resultado

d) En $(X\ T_{\leq})$ el punto x es aislado si $\{x\}$ es un conjunto abierto y por lo tanto un maximal en X Es obvio que M es el conjunto de todos los puntos aislados de X

e) En $(X\ T_{\leq})$ el punto x es un punto de acumulacion de $A \subseteq X$ si $V(x) = \uparrow x$ intercepta $A \setminus \{x\}$

2 CONCEPTOS TOPOLOGICOS BASICOS

Proposicion 2 1 Sea $(X\ T)$ un espacio de Alexandroff T_0 y sea $B \subseteq X$ Entonces las siguientes afirmaciones son validas

a) Para $x \in X$ $\overline{\{x\}} = \downarrow x$

b) $B = \{x \in B\ \ \uparrow x \subseteq B\} = U\{\uparrow x\ \ \uparrow x \subseteq B\}$

c) $\bar{B} = U\{\downarrow x :\ x \in B\}$ o

d) $B = \bar{B} \setminus \{x\ \ x \text{ es maximal en } B\}$

e) $Fr(B) = U\{\downarrow x\ \ x \in B\} \setminus \{x\ \ \uparrow x \subseteq B\}$

Demostración

a) $\downarrow x$ es un conjunto bajo por lo tanto es un conjunto cerrado Asi que $\overline{\{x\}} \subseteq \downarrow x$ Ahora sea $z \in \downarrow x$ luego $z \leq x$ Si $z \in \overline{\{x\}}^c$ el cual es un conjunto abierto $\Rightarrow \uparrow z \subseteq \overline{\{x\}}^c$ luego $\uparrow z \cap \overline{\{x\}} = \emptyset$ Como $x \in \uparrow z$ resulta $x \notin \overline{\{x\}}$ lo que es una contradiccion

b) Directa ya que B es la union de todos los abiertos que están incluidos en el

c) Si $x \in B$ entonces $\overline{\{x\}} = \downarrow x \subseteq \bar{B}$ así $U\{\downarrow x \quad x \in B\} \subseteq \overline{B}$

Por el otro lado si $x \in B \Rightarrow x \in \downarrow x \subseteq U\{\downarrow x \quad x \in B\}$ así que $B \subseteq U\{\downarrow x \quad x \in B\}$ el cual es un conjunto cerrado Por lo tanto $\bar{B} \subseteq U\{\downarrow x \quad x \in B\}$

d) Si $x \in B$ entonces $x \in \overline{B}$ y $\uparrow x \cap B \backslash \{x\} \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, y \in B$ tal que $x \leq y$ así que x no es maximal en B Luego $B \subseteq \overline{B} \backslash \{x \quad x$ es maximal en $B\}$ Por otro lado si $z \in \overline{B}$ y z no es maximal en B entonces $\uparrow z \cap B \neq \emptyset$ Si $\uparrow z \cap B = \{z\}$ entonces z es un máximal en $B \rightarrow\leftarrow$ Luego existe $p \in B \quad z \leq p \wedge z \neq p$ es decir $\uparrow z \cap B \backslash \{z\} \neq \emptyset$ En conclusion $z \in B$

e) Directa ya que $Fr(B) = \overline{B} \backslash B$ □

Proposicion 2 2 Sea $(X\ T)$ un espacio de Alexandroff T_0 que cumple la propiedad de cadena ascendente y sea $B \subseteq X$

Entonces

a) $B = \emptyset \Leftrightarrow B \cap M = \emptyset$

b) $\bar{B} = U\{\downarrow x \quad x \in M(B)\} = \downarrow M(B)$

c) $B = U\{(\downarrow x) \backslash \{x\} \quad x \in M(B)\} = (\downarrow M(B)) \backslash M(B)$

d) Un subconjunto B es denso si y solo si $M \subseteq B$

e) El subconjunto B es nunca denso si y solo si $M \cap B = \emptyset$

f) Si $|M|= 1$ con $|M|$ el cardinal del conjunto M entonces cualquier subconjunto de X es denso o nunca denso

Demostracion

a) $\Rightarrow$ Supongamos $B = \emptyset$ y $x \in B \cap M$ Asi que x es maximal de X en B luego $\uparrow x = \{x\} \subseteq B$ lo que contradice ya que $B = \emptyset$

$\Leftarrow$ Supongamos ahora que $B \cap M = \emptyset$ y $z \in B$ esto quiere decir $\uparrow z \subseteq B$ Pero como X satisface PCA entonces existe un maximal p en X tal que $z \leq p$ luego $p \in \uparrow z \subseteq B$ luego $p \in B \cap M \rightarrow\mid\leftarrow$

b) $\Rightarrow$ Si $x \in B$ entonces existe un elemento maximal y en B tal que $x \leq y$ lo que implica que $\bar{B} = U\{\downarrow x \quad x \in B\} \subseteq U\{\downarrow x \quad x \in M(B)\}$

$\Leftarrow$ Para la otra inclusion es obvio que $U\{\downarrow x \quad x \in M(B)\} \subseteq \bar{B}$

c) Por la proposicion anterior 2 1 se tiene que

$B = \bar{B} \setminus \{x \quad x$ es maximal en $B\} = U\{\downarrow x \quad x \in M(B)\} \setminus M(B) = U\{(\downarrow x) \setminus \{x\} \; x \in M(B)\} = (\downarrow M(B)) \setminus M(B)$

d) $\Rightarrow$ Supongamos que $M \subseteq B$ así que $M(B) = M$ luego por b) se

$$\bar{B} = U\{\downarrow x \quad x \in M(B)\}$$

$$\bar{B} = U\{\downarrow x \quad x \in M\} = X$$

$\Leftarrow$ Ahora supongamos que B es denso y *sea* $x \in M$ Luego tenemos que $X = \bar{B} = \downarrow M(B)$ de esta forma $x \in \downarrow M(B)$ por lo tanto $\uparrow x \cap B \neq \emptyset$ pero como x es un maximal entonces $\uparrow x = \{x\}$ en conclusion $x \in B$

e) $\Rightarrow$ Un subconjunto de un espacio topologico es nunca denso si $\overline{B} = \emptyset$

Ahora supongamos que $\overline{B} = \emptyset$ luego por la parte a) de la proposición $\bar{B} \cap M = \emptyset$ por lo tanto $B \cap M = \emptyset$

$\Rightarrow$ Por otra parte si $M \cap B = \emptyset$ entonces $M \cap \overline{B} = \emptyset$ ya que $\bar{B} = U\{\downarrow x \quad x \in B\}$ Luego por la parte a) de la proposición $\overline{B} = \emptyset$

f) Sea $|M| = 1$ y B un subconjunto de $X \Rightarrow M \subseteq B$ ó $M \nsubseteq B$ Si $M \subseteq B \Rightarrow$ por la parte d) de la proposicion B es denso Si $M \nsubseteq B$ entonces $M \cap B = \emptyset$ luego por la parte e) de la proposición B es nunca denso □

Para ilustrar lo anterior veamos los siguientes ejemplos

Ejemplo 1 Considerese el conjunto ordenado X con el orden parcial en la siguiente figura

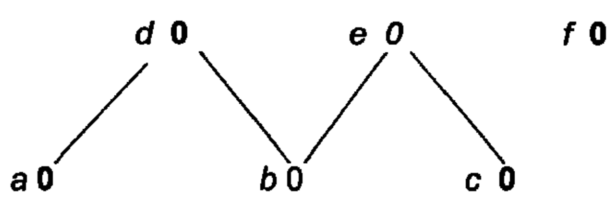

Figura 5

Así $X = \{a\ b\ c\ d\ e\ f\}$ satisface PCA y $M = \{d\ e\ f\}$

$B = \{a \ c \ d \ f\}$ $M(B) = \{c \ d \ f\}$ entonces

1) $B = \uparrow a \cup \uparrow f = \{a \ d \ f\}$

2) $\overline{B} = \downarrow c \cup \downarrow d \cup \downarrow f = B \cup \{b\}$

3) $Fr(B) = \overline{B} \setminus B = \{b \ c\}$

4) $B = (\downarrow c) \setminus \{c\} \cup (\downarrow d) \setminus \{d\} \cup (\downarrow f) \setminus \{f\} = \{a \ b\}$

Ejemplo 2

Sea X un conjunto ordenado con el orden parcial como aparece en la siguiente figura

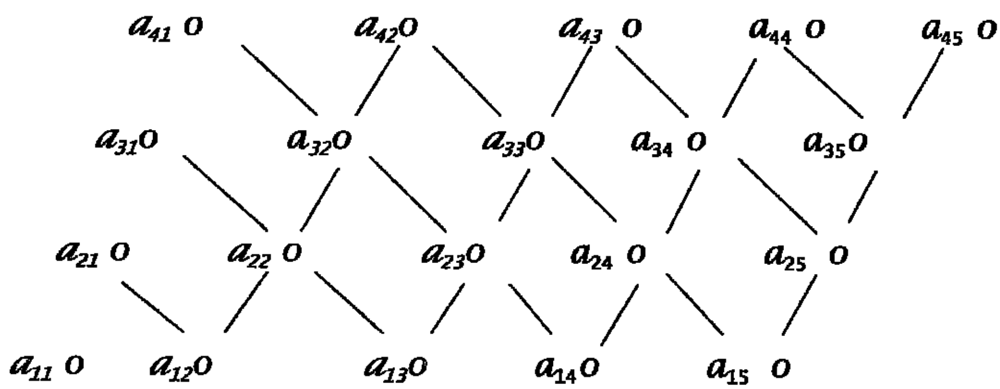

figura 6

Así X satisface la PCA donde el conjunto $M=\{a_{11} \ a_{21} \ a_{31} \ a_{41} \ a_{42} \ a_{43}$

$a_{44} \ a_{45}\}$ Cualquier subconjunto que contiene a M es denso

Sea $B = \{ a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ a_{14} \ a_{15} \quad a_{21} \ a_{22} \ a_{23} \ a_{24} \ a_{25} \}$

entonces

a) $B =\{ a_{11} \quad a_{21} \}$

b) $\overline{B} = B$

c) $B = B \setminus \{ a_{11} \ a_{21} \ a_{22} \quad a_{23} \quad a_{24} \quad a_{25} \quad \}$

$= \{ a_{12} \quad a_{13} \quad a_{14} \quad a_{15} \quad \}$

d) $Fr(B) = B \setminus \{ a_{11} \quad a_{21} \}$

Si $C = \{ a_{11} \ a_{12} \quad a_{13} \quad a_{14} \quad a_{15} \quad \}$ entonces

a) $C^{\circ} = \{ a_{11} \}$

b) $\overline{C} = C$

c) $C = \overline{C} \setminus C = \emptyset$

d) $Fr(C) = C \setminus \{ a_{11} \}$

3 ALGUNAS PROPIEDADES TOPOLOGICAS

PROPOSICION 3 1 Sea $(X \ T)$ un espacio de Alexandroff para todo $p \in X$ $V(p)$ es conexo

Demostracion

Supongamos que $V(p)$ es inconexo luego existen subconjuntos abiertos G y H de X tales que $V(p) \cap G$ y $V(p) \cap H$ son conjuntos no vacios disjuntos cuya union es $V(p)$

Como $V(p) \cap G \cap V(p) \cap H = \emptyset$ entonces

$V(p) \cap [G \cap H] = \emptyset$ (*)

Por otro lado como $V(p) \cap G \cup V(p) \cap H = V(p)$ resulta

$V(p) \cap [G \cup H] = V(p)$ luego $V(p) \subseteq [G \cup H]$

por lo que $p \in G$ ó $p \in H$ ya que si $p \in G \cap H$ (*) es distinto del vacio Si $p \in G \setminus H \Rightarrow G$ es un abierto que contiene a p luego $V(p) \subseteq G$ Por otro lado de (*) se deduce que $[V(p) \cap G] \cap H = \emptyset$ pero como $V(p) \subseteq G \Rightarrow$ la ecuación anterior queda asi $V(p) \cap H = \emptyset$ $\rightarrow| \leftarrow$ Luego $V(p)$ no es inconexo y por tanto es conexo □

TEOREMA 3 2 Sea X un espacio de Alexandroff T_0 entonces

a) X es localmente conexo

b) X es primero contable

c) X es segundo contable si y solo si es contable

d) X es separable si y solo si $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\{x_n\}}$

Demostración

a) Sea $p \in X$ luego $V(p)$ es un conjunto conexo y abierto que contiene a p y al mismo tiempo es un subconjunto de todo conjunto abierto que contiene a P luego X es localmente conexo ya que es localmente conexo en cada uno de sus puntos

b) Para cada punto $p \in X$ existe una base local contable B_p es decir cada abierto G que contiene a p existe $V(p) \in B_p$ tal que $p \in V(p) \subset G$

c) Un espacio contable y primero contable en cualquier espacio topológico implica segundo contable Si el espacio es segundo contable entonces existe una base contable para el espacio luego así es el espacio

d) Si X es separable entonces posee un subconjunto denso contable $D = \{x_n \ n \in \mathbb{N}\}$ como $\overline{D} = D \cup D = X$ para cada $x \in X$ si $x \in D$ entonces $V(x) \setminus \{x\} \cap D \neq \emptyset$ entonces $V(x) \cap D \neq \emptyset$ Si $x \in D$ se tiene $V(x) \cap D \neq \emptyset$ entonces $x_n \in V(x)$ para algun $n \in \mathbb{N}$ luego $x \leq x_n$ como $\overline{\{x_n\}} = \downarrow x_n \Rightarrow x \in \overline{\{x_n\}}$ asi $X = \cup_{n=1}^{\infty} \overline{\{x_n\}}$ Lo contrario se prueba en la misma direccion □

CAPITULO III

ESPACIOS DE ALEXANDROFF Y ALGUNOS AXIOMAS DE SEPARACION

1 INTRODUCCION

Los axiomas de separación son propiedades topológicas que se refieren fundamentalmente a la separacion por abiertos de puntos puntos y conjuntos cerrados ó cerrados y cerrados

A cada espacio de Alexandroff que cumple un determinado axioma de separacion se le asocia un preorden esto da origen a espacios topologicos cuyo conjunto tiene propiedades especiales Uno de los objetivos de este trabajo es conocer la interpretacion de algunas nociones topológicas (interior cerradura etc) de espacios de Alexandroff asociados a un axioma de separacion

Un espacio topologico $(X\ T)$ es T_1 si y sólo si dados dos puntos distintos cualesquiera $x\ y \in X$ cada uno pertenece a un conjunto abierto que no contiene al otro

El teorema 2 3 de éste capitulo plantea que un espacio de Alexandroff T_1 equivale a que el espacio sea discreto llevando asi a que el estudio de estos espacios no sea muy interesante Por esta razon en este capitulo tambien se analiza qué tipo de preorden tiene asociado un espacio de Alexandroff que cumple con un determinado axioma de separación pero sin la hipótesis de que el espacio sea T_1

2 ESPACIOS DE ALEXANDROFF $(T_1 - T_2)$

Definicion 2 1 Un espacio topologico $(X\ T)$ es T_1 si y sólo si dados $x\ y \in X$ con $x \neq y$ existen $A\ B$ abiertos tales que $x \in A$ $y \notin A$ $x \notin B$ $y \in B$

Proposicion 2 2 Un espacio topologico es discreto si y solo si cada conjunto unitario $\{x\}$ del espacio es abierto

Demostración

$\Rightarrow$ En todo espacio discreto los subconjuntos del espacio son abiertos en particular los conjuntos unitarios son abiertos

$\Leftarrow$ Por otro lado si cada conjunto unitario $\{x\}$ del espacio es abierto entonces dado $A \subseteq X$ como $A = \bigcup_{x \in A}\{x\}$ A es abierto luego el espacio es discreto □

Teorema 2 3 X es un espacio de Alexandroff T_1 si y solo si es discreto

Demostracion

$\Rightarrow$ Si X es un espacio de Alexandroff T_1 afirmamos $V(x) = \{x\}$ En efecto supongamos que existe $y \in V(x)$ con $x \neq y$ luego por la observación 2 7 (capitulo 1) se tiene que para $V(x) = \uparrow x$ $x \leq y$ entonces $V(y) \subseteq V(X)$ Como X es T_1 existen $A\ B$ abiertos tales que $x \in A$ $y \notin A$ $x \notin B$ $y \in B$ Por lo tanto se tiene

$$V(y) \subseteq V(x)$$

y

$$V(x) \subseteq A$$

Con lo que se concluye que $x\ y \in A$ lo cual es una contradicción afirmando así que $x = y$ y $V(x) = \{x\}$ y por la proposicion 2 2 de este capítulo el espacio es discreto

$\Leftarrow$ Si X es discreto obviamente es un espacio de Alexandroff T_1 □

Definicion 2 4 Un espacio topologico $(X\ T)$ es T_2 si separa puntos es decir que para todo $x \neq y \in X$ existen $U\ S$ abiertos disjuntos con $x \in U$ y $y \in S$

Teorema 2 5 X es un espacio de Alexandroff T_2 si y solo si para $x \neq y$ en X $V(x) \cap V(y) = \emptyset$

Demostración

$\Rightarrow$ Si X es un espacio T_2 entonces existen $U\ S$ abiertos disjuntos de x e y respectivamente como $V(x) \subseteq U$ y $V(y) \subseteq S$ entonces $V(x) \cap V(y) = \emptyset$

$\Leftarrow$ Es trivial dado que $V(x)$ y $V(y)$ son abiertos disjuntos que contienen a x e y respectivamente □

Teorema 2 6 X es un espacio de Alexandroff T_2 si y solo si es discreto

Demostracion

$\Rightarrow$ Como X es un espacio de Alexandroff T_2 entonces es T_1 luego por el teorema 2 3 es discreto

$\Leftarrow$ Si X es discreto obviamente es un espacio de Alexandroff T_2 □

La relacion identidad en un conjunto X es claramente una relacion de equivalencia (reflexiva simetrica y transitiva) Se sabe que una relacion es simétrica siempre que $a \leq b$ entonces $b \leq a$ para cualquier $a\ b \in X$

Veamos que tipo de preorden tienen asociado los axiomas se separacion T_1 y T_2 en los espacios de Alexandroff Para esto se plantea la siguiente proposición

Proposicion 2 7 El preorden asociado a los espacios de Alexandroff T_1 como T_2 es la relación de identidad

Demostracion

Los espacios de Alexandroff T_1 como T_2 son discretos si y solo si $V(x) = \{x\}$ para todo $x \in X$ si y solo si $x \leq y$ implica $x = y$ si y solo si $\leq$ es la relacion de identidad (ver demostración del teorema 2 3 y 2 6) □

La proposición anterior nos afirma que $V(x) = \uparrow\{x\} = \{x\}$ para todo $x \in X$ es decir todos los elementos de los espacios de Alexandroff T_1 como T_2 son maximales luego la correspondiente gráfica del conjunto es

Figura 7

Como en cualquier espacio topologico $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$ por lo tanto para los espacios de Alexandroff T_1 y T_2 la proposición 2 1 (capitulo 2) queda así

Proposicion 2 8 Sea $(X\ T)$ un espacio de Alexandroff T_1 ó T_2 y sea $B \subseteq X$ Entonces las siguientes afirmaciones son válidas

a) Para $x \in X$ $\overline{\{x\}} = \downarrow x = \{x\}$

b) $B = \{x \in B \quad \uparrow x \subseteq B\} = U\{\uparrow x \quad \uparrow x \subseteq B\} = B$

c) $\bar{B} = U\{\downarrow x \quad x \in B\} = B$

d) $B = \overline{B} \backslash \{x \quad x\ es\ maximal\ en\ B\} = B \backslash B = \emptyset$

e) $Fr(B) = U\{\downarrow x \quad x \in B\} \backslash \{x \quad \uparrow x \subseteq B\} = B \backslash B = \emptyset$

Como se menciona a inicio de este capitulo un espacio de Alexandroff T_1 ó T_2 equivale a que el espacio sea discreto llevando asi a que su estudio no sea muy interesante comprobándose esto con la ayuda de la ultima figura y la ultima proposicion

3 AXIOMAS DE SEPARACION T_3 Y T_4

Definicion 3 1 Un espacio topológico X es T_3 si es T_1 y separa puntos de cerrados es decir para todo $x \in X$ $F \subseteq X$ cerrado tales que $x \notin F$ existen entornos disjuntos de x y F respectivamente

Definicion 3 2 Un espacio topologico X es T_4 si es T_1 y separa cerrados de cerrados es decir para todo par de subconjuntos cerrados disjuntos F y K de X existen abiertos disjuntos G y H tales que $F \subseteq G$ y $K \subseteq H$

En topología se estudia que las siguientes implicaciones son estrictas

$$T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$$

Estos axiomas de separación no son muy utiles al trabajar con espacios de Alexandroff porque T_1 ya equivale a que el espacio sea discreto Por esta razon veamos que tipo de preorden tiene asociado un espacio de Alexandroff que cumple con los axiomas de separacion T_3 y T_4 pero sin la hipótesis de que los espacios sean T_1

Definicion 3 3 Se define T_3 y T_4 de la misma forma que T_3 y T_4 respectivamente pero sin la hipótesis de que los espacios sean T_1

Proposicion 3 4 El preorden asociado a un espacio de Alexandroff T_3 es una relacion de equivalencia

Demostración

Solo falta probar la simetria para demostrar que el espacio T_3 es una relacion de equivalencia Supongamos que $x \leq y$ Si $y \nleq x$ entonces $y \notin \overline{\{x\}}$ (ver observación 2 7 del capitulo 1) luego existen A y B abiertos disjuntos tales que $y \in A$ y $\overline{\{x\}} \subseteq B$ pero $y \in V(x) \subseteq B$ Esto es contradictorio pues A y B son disjuntos Luego si $x \leq y$ entonces $y \leq x$ □

Definicion 3 5 Un preorden $\leq$ es dirigido si para todo x y existe z tal que $x \leq z$ y $y \leq z$

Definicion 5 6 En una relación x e y estan en la misma componente si existe $n \in N$ y z_1 z_2 z_3 z_n tales que $z_1 = x$ $z_n = y$ y z_i z_{i+1} son comparables para todo $1 \leq i \leq n-1$

Proposición 5 7 El preorden asociado a un espacio de Alexandroff T_4 es un preorden dirigido por componente

Demostracion

Supongamos que X es T_4 y $x \in X$ Se define $B = \{y \in X / \exists\ z\ x \leq y\ y \leq z\}$ Para demostrar que X es un preorden dirigido por componente se debe probar que B coincide con la componente de x Para esto se debe llegar a si $y \in B$ entonces 1) $y \leq y$ implica $y \in B$ y 2) $y \leq y$ implica $y \in B$

En efecto 1) es trivial 2) sea $y \in B$ entonces existe z $x \leq y$ $y \leq z$ Supongamos que no existe z tal que $z \leq z$ $y \leq z$ luego $\overline{\{z\}}$ y $\overline{\{y\}}$ son cerrados disjuntos (ver observación 2 7 parte (b) capitulo 1) Por lo tanto existen abiertos que los separan pero esto es absurdo pues un abierto que contiene a z contiene también a $y \leq z$ y un abierto que contiene a y contiene también a $y \leq y$ es decir que los abiertos que separan no son disjuntos Por lo tanto sí existe z En conclusión $x \leq z \leq z$ $y \leq z$ de esta forma $y \in B$ □

En la siguiente tabla se resumen los resultados relacionados con el tema

Espacios de Alexandroff	***Relación entre los elementos del conjunto***
Espacios de Alexandroff T_0	Relacion de orden
Espacios de Alexandroff T_1	Relacion de identidad
Espacios de Alexandroff T_2	Relación de identidad
Espacios de Alexandroff T_3	Relacion de equivalencia
Espacios de Alexandroff T_4	Relacion de preorden dirigido por componente

CONCLUSIONES

Luego de conocer los Espacios de Alexandroff he llegado a las siguientes conclusiones

Dado un espacio de Alexandroff X las topologias en X están en correspondencia biunivoca con los preordenes en X Ademas las topologias T_0 corresponden a los ordenes

Dado un espacio de Alexandroff T_0 se puede construir su conjunto ordenado con cualquiera de las relaciones

$x \leq y$ si y solo si $x \in \overline{\{y\}}$ para $V(x) = \uparrow x$

o

$x \leq y$ si y solo si $y \in \overline{\{x\}}$ para $V(x) = \downarrow x$

Dado un conjunto ordenado P se puede construir el espacio de Alexandroff T_0 como el conjunto P con la topologia generada por

$$\boldsymbol{B} = \{ V(x) = \uparrow x \quad x \in P \}$$

o

$$\boldsymbol{B} = \{ V(x) = \downarrow x \quad x \in P \}$$

- El conjunto $\boldsymbol{B} = \{ V(x) \quad x \in X \}$ que genera la topologia del espacio de Alexandroff es unico

- El preorden asociado a los espacios de Alexandroff T_1 como T_2 es la relacion de identidad

- El preorden asociado a un espacio de Alexandroff T_3 es una relacion de equivalencia
- El preorden asociado a un espacio de Alexandroff T_4 es un preorden dirigido por componente
- Sea $(X\ T)$ un espacio de Alexandroff T_0 y sea $B \subseteq X$ Entonces las siguientes afirmaciones son validas

  a) Para $x \in X$ $\overline{\{x\}} = \downarrow x$

  b) $B^{\circ} = \{x \in B \quad \uparrow x \subseteq B\} = U\{\uparrow x \quad \uparrow x \subseteq B\}$

  c) $\bar{B} = U\{\downarrow x \quad x \in B\}$

  d) $B' = \bar{B}\backslash\{x \quad x$ es maximal en $B\}$

  e) $Fr(B) = U\{\downarrow x \quad x \in B\}\backslash\{x \quad \uparrow x \subseteq B\}$

- Sea $(X\ T)$ un espacio de Alexandroff T_1 o T_2 y sea $B \subseteq X$ Entonces las siguientes afirmaciones son validas

  a) Para $x \in X$ $\overline{\{x\}} = \downarrow x = \{x\}$

  b) $B = \{x \in B \quad \uparrow x \subseteq B\} = U\{\uparrow x \quad \uparrow x \subseteq B\} = B$

  c) $\bar{B} = U\{\downarrow x \quad x \in B\} = B$

  d) $B = \bar{B}\backslash\{x \quad x\ es\ maximal\ en\ B\} = B\backslash B = \emptyset$

  e) $Fr(B) = U\{\downarrow x \quad x \in B\}\backslash\{x \quad \uparrow x \subseteq B\} = B \backslash B = \emptyset$

BIBLIOGRAFIA

1 M Garcıa Marrero (1975) **Topologıa** Espana Alhambra

2 Munkres J (1975) **A Fırst Course ın topology** Prentıce Hall

3 Gustavo N Rubıano (2006) **Sobre el numero de topologıas en un conjunto fınıte** Unıversıdad Nacıonal de Colombıa Bogota

4 Seymoup Lıpschutz (1997) **Topologıa General** Schaum Mcgraw Hıll

5 Pablo Sandıno Morales Chavez (2007) **Topologıa del Adelgazamıento Sobre Complejo Celular Cuadratıco y Sobre el Complejo Celular Trıangular** **Tesıs de Maestría** Mexıco D F

6 M Rostamı (1994) **A Topology whıth Orded, Graph and an Enumeratıon Problem** Unıversıdad de Beıra Interıor Portugal

BIBLIOGRAFIA ELECTRONICA

1 Francisco G Arenas (1991) **Some Results on Alexandroff Space** Mathematics Subject Classification 10 enero 2008
< http //at yorku ca/p/a/a/k/12 htm >

2 Hisham B Mahdi and Mohammed S El Atrash (2000) **On T_0 Alexandroff Space** Mathematics Subject Classification Universidad de Gaza Palestina 5 de enero 2008
<http //www iugaza edu ps/ara/research/articles/ / CF / 20%E3 / CD / E3 / CF%20%C7% E1 %C3% D8 / D1 %D4 %A1% 20%CF % 20%E5% D4 / C7 % E3 / 20% E3 / E5% CF% ED pdf >

3 Jesus Antonio Avila G (2003) **El orden de especializacion, un puente entre los espacios topologicos y los conjuntos ordenados** Memorias XIV encuentro de Geometria y II Aritmética Colombia 16 enero 2008
<http //www pedagogica edu co/proyectos/geometria/docs/XIV/orden_especializacion pdf>

4 Jonathan Ariel Barmak (2006) **Espacios Topologicos Finitos Tesis de Licenciatura** Buenos Aires Argentina 20 enero 2008
<http //cms dm uba ar/academico/carreras/licenciatura/tesis/barmak pdf>

5 Francisco Arenas Julian Dontchew and maximilian Ganster (1991) **On Some Weaker Forms of Alexandroff Spaces** 28 diciembre 2007
<http //at yorku ca/p/a/b/a/01 htm>

6 Timothy Speer (2007) **A Short Study of Alexandroff Spaces** Department of Mathematics New York University 30 diciembre 2007
<http //www math ucsb edu/~speer/Papers/AlexandroffSpaces/AlexandroffSpaces pdf >

7 A El Fattah El Atik M E ABD El Monsef and E I Lashin (2001) **On Finite T_0 Topological Space** Departamento de matematicas Tanta University Egypt 29 diciembre 2007
<http //www math uchicago edu/~may/MISC/FiniteSpaces pdf>

8 Thomas Britz and Peter Cameron (2001) **Partially Ordered Sets,** Syracuse University 15 enero 2008
<http //www maths qmw ac uk/~pjc/csgnotes/posets pdf >

9 Gustavo N Rubiano O y Rodrigo de Castro (2004) **Esqueletos de Reticulos Completos** Departamento de Matemáticas Universidad de Colombia Bogota 20 diciembre 2007
<http //www matematicas unal edu co/boletin/Archivos/2004 II/Doc2 pdf>

10 **Teoria del Orden** De Wiquipedia la Enciclopedia libre 20 diciembre 2007 <http //es wikipedia org/wiki/Teor / C3 / ADa_del_orden>

11 **Alexandroff topology** De Wiquipedia la Enciclopedia libre 21 diciembre 2007 < http //en wikipedia org/wiki/Alexandrov_topology >

12 Pratulananda Das And Mamun AR Rashid (2000) **G Closed sets and a new separation axioms in Alexandroff Space** Departamento de Matematicas Jadapur University India 22 diciembre 2007
< www emis de/journals/AM/03 4/das ps+G* >

LISTA DE SIMBOLOS UTILIZADOS

N = el conjunto de los numeros naturales

$(X\ \tau)$ = espacio topologico

$\downarrow x$ = conjunto bajo de x

$\uparrow x$ = conjunto alto de x

$V(x)$ = interseccion de todos los abiertos que contienen a x

$\leq_X$ = el preorden asociado a X

$\leq_Y$ = el preorden asociado a Y

X^{OP} = Espacio Opuesto

$f\ \ X \to Y$ = Funcion de X en Y

$\overset{0}{B}$ = interior de B

$\overline{\{B\}}$ = cerradura de $\{B\}$

B = puntos de acumulacion de B

$Fr(B)$ = frontera de B

$A \setminus B$ = diferencia

$|M|$ = el cardinal del conjunto M